CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Ejercicio nº 1.-

Halla las siguientes integrales:

a) $\int x(x+1)^2\,dx$ b) $\int \frac{\cos 2x}{sen^3\,2x}\,dx$

Ejercicio nº 2.-

Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ b) $\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx$

Ejercicio nº 3.-

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(2+3x^2\right)^2 dx$ b) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

Ejercicio nº 4.-

Halla las integrales siguientes:

a) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx$ b) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$

Ejercicio nº 5.-

Halla las integrales siguientes:

a) $\int \left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx$ b) $\int \frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$

Métodos de integración

Ejercicio nº 6-

Calcula esta integral, haciendo el cambio $\sqrt{1+x}=t$:

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Ejercicio nº 7.-

Resuelve estas integrales:

a) $\int (2+3x)\,senx\,dx$ b) $\int 3x^2\cdot arctgx\,dx$

Ejercicio nº 8.-

Halla la siguiente integral:

$$\int \frac{x^2-5x+9}{x^2-5x+6}\,dx$$

Ejercicio nº 9.-

Halla la integral:

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+2x+17}$$

Ejercicio nº 10.-

Resuelve, utilizando la sustitución $\sqrt{e^x+1}=t$, la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

Ejercicio nº 11.-

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(x^2+1\right)e^x\,dx$ **b)** $\int (x-1)\cos x\,dx$

Ejercicio nº 12.-

Resuelve:

$$\int \frac{x^4+2x-6}{x^3+x^2-2x}\,dx$$

Ejercicio nº 13.-

Resuelve la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+34}$$

Ejercicio nº 14.-

Halla la siguiente integral, haciendo el cambio *x = sen t*:

$$\int \frac{x^2\,dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\text{Recuerda que } sen^2 x=\frac{1}{2}-\frac{\cos 2x}{2}\right)$$

Ejercicio nº 15.-

Hallas las integrales:

a) $\int (x+5)\cos x\,dx$ **b)** $\int \left(x^2+2x\right)\ln x\,dx$

Ejercicio nº 16.-

Calcula la integral:

$$\int \frac{dx}{x^3-2x^2+x}$$

Ejercicio nº 17.-

Calcula:

$$\int \frac{x^2+x+6}{x^2+5}\,dx$$

Ejercicio nº 18.-

Calcula la siguiente integral, utilizando la sustitución $\sqrt{x-1}=t$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Ejercicio nº 19.-

Calcula las integrales:

a) $\int x\cos(3x)dx$ **b)** $\int (x+1)\ln x\, dx$

Ejercicio nº 20.-

Calcula:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3-4x}\,dx$$

Ejercicio nº 21.-

Calcula esta integral:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2}$$

Ejercicio nº 22.-

Resuelve mediante el método se sustitución:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\,dx \qquad \text{(Haz } \sqrt{x}=t\text{)}$$

Ejercicio nº 23.-

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int (x^2+x+1)e^x\,dx$ **b)** $\int x^2\ln x\,dx$

Ejercicio nº 24.-

Resuelve esta integral:

$$\int \frac{5x^3-25x^2+20x+1}{x^3-5x^2+4x}\,dx$$

Ejercicio nº 25.-

Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+5}$$

SOLUCIONES CÁLCULO DE PRIMITIVAS

Ejercicio nº 1.-

Halla las siguientes integrales:

a) $\int x(x+1)^2\,dx$ **b)** $\int \frac{\cos 2x}{sen^3\,2x}\,dx$

Solución:

a) $\int x(x+1)^2\,dx = \int x\left(x^2+2x+1\right)dx = \int\left(x^3+2x^2+x\right)dx = \frac{x^4}{4}+\frac{2x^3}{3}+\frac{x^2}{2}+k$

b) $\int \frac{\cos 2x}{sen^3\,2x}\,dx = \int \cos 2x \cdot (sen\,2x)^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\int 2\cos 2x\,(sen\,2x)^{-3}\,dx = \frac{1}{2}\,\frac{(sen\,2x)^{-2}}{-2}+k =$

$= \frac{-1}{4\,sen^2\,2x}+k$

Ejercicio nº 2.-

Calcula estas integrales:

a) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\,dx$ **b)** $\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx$

Solución:

a) $\int \frac{2x-\sqrt{x}}{x^2}\,dx = \int\left(\frac{2}{x}-\frac{\sqrt{x}}{x^2}\right)dx = \int\left(\frac{2}{x}-x^{-\frac{3}{2}}\right)dx = 2\ln|x| - \frac{x^{-\frac{1}{2}}}{\frac{-1}{2}}+k = 2\ln|x|+\frac{2}{\sqrt{x}}+k$

b) $\int \frac{x+\ln x}{x}\,dx = \int\left(1+\frac{\ln x}{x}\right)dx = \int\left(1+\frac{1}{x}\cdot \ln x\right)dx = x+\frac{\ln^2 x}{2}+k$

Ejercicio nº 3.-

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int\left(2+3x^2\right)^2 dx$ **b)** $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx$

Solución:

a) $\int\left(2+3x^2\right)^2 dx = \int\left(4+9x^4+12x^2\right)dx = 4x+\frac{9x^5}{5}+\frac{12x^3}{3}+k = \frac{9x^5}{5}+4x^3+4x+k$

b) $\int \frac{\cos(\ln x)}{x}\,dx = \int \frac{1}{x}\cdot\cos(\ln x)\,dx = sen(\ln x)+k$

Ejercicio nº 4.-

Halla las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx$ **b)** $\displaystyle\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{4}{4x+1}\,dx=3arctgx+\frac{5}{4}\ln|4x+1|+k$

b) $\displaystyle\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{tgx}\,dx=e^{tgx}+k$

Ejercicio nº 5.-

Halla las integrales siguientes:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx$ **b)** $\displaystyle\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx$

Solución:

a) $\displaystyle\int\left(\frac{3}{1+x^2}+\frac{5}{4x+1}\right)dx=3\int\frac{1}{1+x^2}\,dx+\frac{5}{4}\int\frac{4}{4x+1}\,dx=3arctgx+\frac{5}{4}\ln|4x+1|+k$

b) $\displaystyle\int\frac{e^{tgx}}{\cos^2 x}\,dx=\int\frac{1}{\cos^2 x}\cdot e^{tgx}\,dx=e^{tgx}+k$

Métodos de integración

Ejercicio nº 6-

Calcula esta integral, haciendo el cambio $\sqrt{1+x}=t$:

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx$$

Solución:

Hacemos el cambio $\sqrt{1+x}=t \;\rightarrow\; 1+x=t^2 \;\rightarrow\; x=t^2-1 \;\rightarrow\; dx=2t\,dt$

$$\int x^2\sqrt{1+x}\,dx=\int\left(t^2-1\right)^2 t\cdot 2t\,dt=\int 2\left(t^2-1\right)^2 t^2\,dt=2\int\left(t^3-t\right)^2 dt=2\int\left(t^6-2t^4+t^2\right)dt=$$

$$=2\left(\frac{t^7}{7}-\frac{2t^5}{5}+\frac{t^3}{3}\right)+k=\frac{2\sqrt{(1+x)^7}}{7}-\frac{4\sqrt{(1+x)^5}}{5}+\frac{2\sqrt{(1+x)^3}}{3}+k$$

Ejercicio nº 7.-

Resuelve estas integrales:

a) $\displaystyle\int(2+3x)\,senx\,dx$ **b)** $\displaystyle\int 3x^2\cdot arctgx\,dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u = 2+3x \quad \to \quad du = 3dx \\ dv = senx\, dx \quad \to \quad v = -cosx \end{cases}$

$$\int (2+3x) senx\, dx = -(2+3x) cosx + 3\int cosx\, dx = -(2+3x) cosx + 3senx + k$$

b) $\begin{cases} u = arctgx \quad \to \quad du = \dfrac{1}{1+x^2}\, dx \\ dv = 3x^2\, dx \quad \to \quad v = x^3 \end{cases}$

$$\int 3x^2 arctgx\, dx = x^3 arctgx - \int \frac{x^3}{1+x^2}\, dx = x^3 arctgx - \int \left(x - \frac{x}{1+x^2} \right) dx =$$

$$= x^3 arctgx - \frac{x^2}{2} + \frac{1}{2}\, ln\left(1+x^2\right) + k$$

<u>Ejercicio nº 8.-</u>

Halla la siguiente integral:

$$\int \frac{\boldsymbol{x^2 - 5x + 9}}{\boldsymbol{x^2 - 5x + 6}}\, \boldsymbol{dx}$$

Solución:

- Efectuamos la división y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{x^2 - 5x + 6} = 1 + \frac{3}{(x-2)\,(x-3)}$$

$$\frac{3}{(x-2)\,(x-3)} = \frac{A}{x-2} + \frac{B}{x-3} = \frac{A(x-3) + B(x-2)}{(x-2)\,(x-3)}$$

Para $x = 3 \quad \to \quad B = 3$

Para $x = 2 \quad \to \quad -A = 3 \quad \to \quad A = -3$

- Por tanto:

$$\int \frac{x^2 - 5x + 9}{x^2 - 5x + 6}\, dx = \int \left(1 + \frac{-3}{x-2} + \frac{3}{x-3} \right) dx = x - 3\ ln\ |\ x-2\ | + 3\ ln\ |\ x-3\ | + k$$

<u>Ejercicio nº 9.-</u>

Halla la integral:

$$\int \frac{\boldsymbol{2x\, dx}}{\boldsymbol{x^2 + 2x + 17}}$$

Solución:

- Observamos que el denominador no tiene raíces reales.

$$x^2 + 2x + 17 = 0 \quad \to \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-68}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-64}}{2} \quad \to \quad \text{No tiene raíces reales.}$$

- Descomponemos la fracción:

$$\int \frac{2x\,dx}{x^2+2x+17} = \int \frac{2x+2-2}{x^2+2x+17}\,dx = \int \frac{2x+2}{x^2+2x+17}\,dx - 2\int \frac{dx}{x^2+2x+17} =$$

$$= ln\left(x^2+2x+17\right) - 2\int \frac{dx}{(x+1)^2+16} = ln\left(x^2+2x+17\right) - 2\int \frac{\frac{1}{16}\,dx}{\left(\frac{x+1}{4}\right)^2+1} =$$

$$= ln\left(x^2+2x+17\right) - \frac{1}{2}\int \frac{\frac{1}{4}\,dx}{1+\left(\frac{x+1}{4}\right)^2} = ln\left(x^2+2x+17\right) - \frac{1}{2}\,arctg\left(\frac{x+1}{4}\right) + k$$

Ejercicio nº 10.-

Resuelve, utilizando la sustitución $\sqrt{e^x+1}=t$, la siguiente integral:

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx$$

Solución:

Hacemos el cambio $\sqrt{e^x+1}=t \;\rightarrow\; e^x+1=t^2 \;\rightarrow\; e^x=t^2-1 \;\rightarrow\; e^x\,dx=2tdt$

$$\int \frac{e^{2x}}{\sqrt{e^x+1}}\,dx = \int \frac{e^x \cdot (e^x\,dx)}{\sqrt{e^x+1}} = \int \frac{(t^2-1)\,2tdt}{t} = \int \left(2t^2-2\right)dt = \frac{2t^3}{3} - 2t + k =$$

$$= \frac{2\sqrt{(e^x+1)^3}}{3} - 2\sqrt{e^x+1} + k$$

Ejercicio nº 11.-

Calcula las siguientes integrales:

a) $\int \left(x^2+1\right) e^x\,dx$ **b)** $\int (x-1)\cos x\,dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u = x^2+1 \;\rightarrow\; du = 2x\,dx \\ dv = e^x\,dx \;\rightarrow\; v = e^x \end{cases}$

$$\int \left(x^2+1\right) e^x\,dx = \left(x^2+1\right)e^x - 2\underbrace{\int x\,e^x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = x \;\rightarrow\; du_1 = dx \\ dv_1 = e^x\,dx \;\rightarrow\; v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = xe^x - \int e^x\,dx = xe^x - e^x$$

Así:

$$\int \left(x^2+1\right) e^x\,dx = \left(x^2+1\right)e^x - 2x\,e^x - 2e^x + k = \left(x^2+1-2x-2\right)e^x + k =$$

$$= \left(x^2 - 2x - 1\right) e^x + k$$

b) $\begin{cases} u = x - 1 \quad \rightarrow \quad du = dx \\ dv = cosx\, dx \quad \rightarrow \quad v = senx \end{cases}$

$$\int (x-1) cosx\, dx = (x-1) senx - \int senx\, dx = (x-1) senx + cosx + k$$

<u>Ejercicio nº 12.-</u>

Resuelve:

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx$$

Solución:

- Efectuamos la división y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x} = x - 1 + \frac{3x^2 - 6}{x^3 + x^2 - 2x} = x - 1 + \frac{3x^2 - 6}{x(x-1)(x+2)}$$

$$\frac{3x^2 - 6}{x(x-1)(x+2)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x+2} = \frac{A(x-1)(x+2) + Bx(x+2) + Cx(x-1)}{x(x-1)(x+2)}$$

Para $x = 0 \quad \rightarrow \quad -2A = -6 \quad \rightarrow \quad A = 3$

Para $x = 1 \quad \rightarrow \quad 3B = -3 \quad \rightarrow \quad B = -1$

Para $x = -2 \quad \rightarrow \quad 6C = 6 \quad \rightarrow \quad C = 1$

- Por tanto:

$$\int \frac{x^4 + 2x - 6}{x^3 + x^2 - 2x}\, dx = \int \left(x - 1 + \frac{3}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x+2} \right) dx =$$

$$= \frac{x^2}{2} - x + 3 ln|x| - ln|x-1| + ln|x+2| + k$$

<u>Ejercicio nº 13.-</u>

Resuelve la integral:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 6x + 34}$$

Solución:

- Comprobamos que el denominador no tiene raíces reales:

$$x^2 + 6x + 34 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-6 \pm \sqrt{36 - 136}}{2} = \frac{-6 \pm \sqrt{-100}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales.}$$

- Transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado.

$$\int \frac{dx}{x^2+6x+34} = \int \frac{dx}{(x+3)^2+25} = \int \frac{\frac{1}{25}}{\left(\frac{x+3}{5}\right)^2+1}\, dx = \frac{1}{5}\int \frac{\frac{1}{5}}{1+\left(\frac{x+3}{5}\right)^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{5}\, arctg\left(\frac{x+3}{5}\right) + k$$

Ejercicio nº 14.-

Halla la siguiente integral, haciendo el cambio *x = sen t*:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad \left(\textbf{Recuerda que } sen^2 x = \frac{1}{2} - \frac{cos\, 2x}{2}\right)$$

Solución:

Hacemos el cambio $x = sent \;\rightarrow\; dx = cost\, dt$:

$$\int \frac{x^2\, dx}{\sqrt{1-x^2}} = \int \frac{sen^2\, t\; cos\, t\, dt}{\sqrt{1-sen^2 t}} = \int \frac{sen^2 t\, cost\, dt}{cos\, t} = \int sen^2 t\, dt = \int \left(\frac{1}{2} - \frac{cos\, 2t}{2}\right) dt = \frac{t}{2} - \frac{sen\, 2t}{4} + k =$$

$$= \frac{arcsenx}{2} - \frac{sen\,(2\, arcsenx)}{4} + k = \frac{arcsenx}{2} - \frac{2\, sen\,(arcsenx) \cdot cos\,(arcsenx)}{4} + k =$$

$$= \frac{arcsenx}{2} - \frac{x\sqrt{1-x^2}}{2} + k$$

Ejercicio nº 15.-

Hallas las integrales:

a) $\int (x+5) cosx\, dx$ **b)** $\int (x^2+2x) lnx\, dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u = x+5 \;\rightarrow\; du = dx \\ dv = cos\, x\, dx \;\rightarrow\; v = sen\, x \end{cases}$

$$\int (x+5) cosx\, dx = (x+5) senx - \int senx\, dx = (x+5) senx + cosx + k$$

b) $\begin{cases} u = ln\, x \;\rightarrow\; du = \frac{1}{x}\, dx \\ dv = (x^2+2x) dx \;\rightarrow\; v = \frac{x^3}{3} + x^2 \end{cases}$

$$\int (x^2+2x)\, lnx\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) lnx - \int \left(\frac{x^2}{3} + x^2\right) \cdot \frac{1}{x}\, dx = \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) lnx - \int \left(\frac{x^2}{3} + x\right) dx =$$

$$= \left(\frac{x^3}{3} + x^2\right) lnx - \frac{x^3}{9} - \frac{x^2}{2} + k$$

Ejercicio nº 16.-

Calcula la integral:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x}$$

Solución:

- Descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{1}{x^3 - 2x^2 + x} = \frac{1}{x(x-1)^2} = \frac{A}{x} + \frac{B}{(x-1)} + \frac{C}{(x-1)^2} = \frac{A(x-1)^2 + Bx(x-1) + Cx}{x(x-1)^2}$$

Para $x = 0 \;\rightarrow\; A = 1$

Para $x = 1 \;\rightarrow\; C = 1$

Para $x = 2 \;\rightarrow\; A + 2B + 2C = 1 \;\rightarrow\; B = -1$

- Así, queda:

$$\int \frac{dx}{x^3 - 2x^2 + x} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{x-1} + \frac{1}{(x-1)^2} \right) dx = ln\left| x \right| - ln\left| x-1 \right| - \frac{1}{x-1} + k$$

Ejercicio nº 17.-

Calcula:

$$\int \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 5}\, dx$$

Solución:

- Efectuamos la división:

$$\int \frac{x^2 + x + 6}{x^2 + 5}\, dx = \int \left(1 + \frac{x+1}{x^2+5} \right) dx = x + \int \frac{x+1}{x^2+5}\, dx = x + \frac{1}{2} \int \frac{2x+2}{x^2+5}\, dx =$$

$$= x + \frac{1}{2} \int \left(\frac{2x}{x^2+5} + \frac{2}{x^2+5} \right) dx = x + \frac{1}{2}\, ln\left(x^2+5\right) + \int \frac{1}{x^2+5}\, dx =$$

$$= x + \frac{1}{2}\, ln\left(x^2+5\right) + \int \frac{\frac{1}{5}}{\frac{x^2}{5}+1}\, dx = x + \frac{1}{2}\, ln\left(x^2+5\right) + \frac{1}{5} \int \frac{1}{\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2 + 1}\, dx =$$

$$= x + \frac{1}{2}\, ln\left(x^2+5\right) + \frac{\sqrt{5}}{5} \int \frac{\frac{1}{\sqrt{5}}}{1 + \left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}\, dx = x + \frac{1}{2}\, ln\left(x^2+5\right) + \frac{\sqrt{5}}{5}\, arctg\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right) + k$$

Ejercicio nº 18.-

Calcula la siguiente integral, utilizando la sustitución $\sqrt{x-1} = t$:

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}$$

Solución:

Hacemos el cambio $\sqrt{x-1}=t \quad \to \quad x-1=t^2 \quad \to \quad x=1+t^2 \quad \to \quad dx=2tdt$

$$\int \frac{dx}{x\sqrt{x-1}}=\int \frac{2tdt}{(1+t^2)\,t}=\int \frac{2dt}{1+t^2}=2arctg\,(t)+k=2arctg\,\sqrt{x-1}+k$$

<u>Ejercicio nº 19.-</u>

Calcula las integrales:

a) $\int x\cos(3x)dx$ **b)** $\int (x+1)\ln x\,dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u=x \quad \to \quad du=dx \\ dv=\cos(3x)dx \quad \to v=\dfrac{sen\,(3x)}{3} \end{cases}$

$$\int x\cos(3x)dx=\frac{x\,sen\,(3x)}{3}-\int \frac{sen\,(3x)}{3}\,dx=\frac{x\,sen\,(3x)}{3}+\frac{\cos\,(3x)}{9}+k$$

b) $\begin{cases} u=\ln x \quad \to du=\dfrac{1}{x}\,dx \\ dv=(x+1)\,dx \quad \to \quad v=\dfrac{x^2}{2}+x \end{cases}$

$$\int (x+1)\ln x\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\cdot\frac{1}{x}\,dx=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\int\left(\frac{x}{2}+1\right)dx=$$

$$=\left(\frac{x^2}{2}+x\right)\ln x-\frac{x^2}{4}-x+k$$

<u>Ejercicio nº 20.-</u>

Calcula:

$$\int \frac{x^3-1}{x^3-4x}\,dx$$

Solución:

- Efectuamos la división y descomponemos en fracciones simples:

$$\frac{x^3-1}{x^3-4x}=1+\frac{4x-1}{x^3-4x}=1+\frac{4x-1}{x\,(x-2)\,(x+2)}$$

$$\frac{4x-1}{x\,(x-2)\,(x+2)}=\frac{A}{x}+\frac{B}{x-2}+\frac{C}{x+2}=\frac{A(x-2)\,(x+2)+B\,x\,(x+2)+C\,x\,(x-2)}{x\,(x-2)\,(x+2)}$$

Para $x=0 \quad \to \quad -4A=-1 \quad \to \quad A=\dfrac{1}{4}$

Para $x = 2 \rightarrow 8B = 7 \rightarrow B = \frac{7}{8}$

Para $x = -2 \rightarrow 8C = -9 \rightarrow C = -\frac{9}{8}$

- Por tanto:

$$\int \frac{x^3 - 1}{x^3 - 4x}\, dx = \int \left(1 + \frac{\frac{1}{4}}{x} + \frac{\frac{7}{8}}{x-2} - \frac{\frac{9}{8}}{x+2} \right) dx = x + \frac{1}{4} ln|x| + \frac{7}{8} ln|x-2| - \frac{9}{8} ln|x+2| + k$$

Ejercicio nº 21.-

Calcula esta integral:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2 + 2x + 2}$$

Solución:

- Comprobamos que el denominador no tiene raíces reales.

$$x^2 + 2x + 2 = 0 \rightarrow x = \frac{-2 \pm \sqrt{4-8}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-4}}{2} \rightarrow \text{No tiene raíces reales.}$$

- Descomponemos la fracción:

$$\int \frac{x\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{2x\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2-2)\,dx}{x^2+2x+2} = \frac{1}{2}\int \frac{(2x+2)\,dx}{x^2+2x+2} - \int \frac{dx}{x^2+2x+2} =$$

$$= \frac{1}{2} ln\left(x^2+2x+2\right) - \int \frac{dx}{(x+1)^2+1} = \frac{1}{2} ln\left(x^2+2x+2\right) - arctg\,(x+1) + k$$

Ejercicio nº 22.-

Resuelve mediante el método se sustitución:

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx \qquad \textbf{(Haz } \sqrt{x} = t\textbf{)}$$

Solución:

Hacemos el cambio: $\sqrt{x} = t \rightarrow x = t^2 \rightarrow dx = 2tdt$

$$\int \frac{1+x}{1+\sqrt{x}}\, dx = \int \frac{1+t^2}{1+t} \cdot 2tdt = \int \frac{2t+2t^3}{1+t}\, dt = \int \left(2t^2 - 2t + 4 - \frac{4}{1+t}\right) dt =$$

$$= \frac{2t^3}{3} - t^2 + 4t - 4ln|1+t| + k = \frac{2\sqrt{x^3}}{3} - x + 4\sqrt{x} - 4ln\left|1+\sqrt{x}\right| + k$$

Ejercicio nº 23.-

Resuelve las siguientes integrales:

a) $\int \left(x^2 + x + 1\right) e^x\, dx$ **b)** $\int x^2 ln x\, dx$

Solución:

a) $\begin{cases} u = x^2 + x + 1 & \rightarrow \quad du = (2x+1)\,dx \\ dv = e^x\,dx & \rightarrow \quad v = e^x \end{cases}$

$$\int (x^2+x+1)\,e^x\,dx = (x^2+x+1)\,e^x - \underbrace{\int (2x+1)\,e^x\,dx}_{I_1}$$

$$\begin{cases} u_1 = 2x+1 & \rightarrow \quad du_1 = 2dx \\ dv_1 = e^x\,dx & \rightarrow \quad v_1 = e^x \end{cases}$$

$$I_1 = (2x+1)\,e^x\,dx - 2\int e^x\,dx = (2x+1)\,e^x - 2e^x$$

Así:

$$\int (x^2+x+1)\,e^x\;dx = (x^2+x+1)\,e^x - (2x+1)\,e^x + 2e^x + k =$$

$$= (x^2+x+1-2x-1+2)\,e^x + k = (x^2-x+2)\,e^x + k$$

b) $\begin{cases} u = \ln x & \rightarrow \quad du = \dfrac{1}{x}\,dx \\ dv = x^2\,dx & \rightarrow \quad v = \dfrac{x^3}{3} \end{cases}$

$$\int x^2 \ln x\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^3}{3}\cdot\frac{1}{x}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \int \frac{x^2}{3}\,dx = \frac{x^3}{3}\ln x - \frac{x^3}{9} + k$$

<u>Ejercicio nº 24.-</u>

Resuelve esta integral:

$$\int \frac{5x^3 - 25x^2 + 20x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}\,dx$$

Solución:

- Efectuamos la división y descomponemos en fracciones iguales:

$$\frac{5x^3-25x^2+20x+1}{x^3-5x^2+4x} = 5 + \frac{1}{x^3-5x^2+4x} = 5 + \frac{1}{x\,(x-1)\,(x-4)}$$

$$\frac{1}{x\,(x-1)\,(x-4)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1} + \frac{C}{x-4} = \frac{A\,(x-1)(x-4) + B\,x\,(x-4) + C\,x\,(x-1)}{x\,(x-1)(x-4)}$$

Para $x = 0 \;\rightarrow\; 4A = 1 \;\rightarrow\; A = \dfrac{1}{4}$

Para $x = 1 \;\rightarrow\; -3B = 1 \;\rightarrow\; B = -\dfrac{1}{3}$

Para $x = 4 \;\rightarrow\; 12C = 1 \;\rightarrow\; C = \dfrac{1}{12}$

- Por tanto:

$$\int \frac{5x^3 - 25x^2 + 20x + 1}{x^3 - 5x^2 + 4x}\,dx = \int \left(5 + \frac{\frac{1}{4}}{x} - \frac{\frac{1}{3}}{x-1} + \frac{\frac{1}{12}}{x-4} \right) dx =$$

$$= 5x + \frac{1}{4}\, ln\left| x \right| - \frac{1}{3}\, ln\left| x - 1 \right| + \frac{1}{12}\, ln\left| x - 4 \right| + k$$

Ejercicio nº 25.-

Resuelve la siguiente integral:

$$\int \frac{\boldsymbol{dx}}{\boldsymbol{x^2 + 2x + 5}}$$

Solución:

- Comprobamos que el denominador no tiene raíces reales:

$$x^2 + 2x + 5 = 0 \quad \rightarrow \quad x = \frac{-2 \pm \sqrt{4 - 20}}{2} = \frac{-2 \pm \sqrt{-16}}{2} \quad \rightarrow \quad \text{No tiene raíces reales.}$$

- Transformamos el denominador para obtener un binomio al cuadrado:

$$\int \frac{dx}{x^2 + 2x + 5} = \int \frac{dx}{(x^2 + 2x + 1) + 4} = \int \frac{dx}{(x+1)^2 + 4} = \int \frac{\frac{1}{4}\, dx}{\left(\frac{x+1}{2} \right)^2 + 1} =$$

$$= \frac{1}{4} \cdot 2 \int \frac{\frac{1}{2}\, dx}{1 + \left(\frac{x+1}{2} \right)^2} = \frac{1}{2}\, arctg\left(\frac{x+1}{2} \right) + k$$